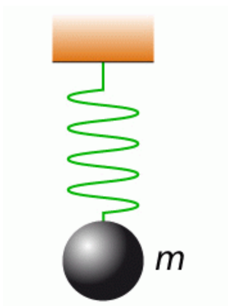
Cours

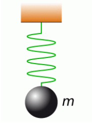
CHAPITRE 5

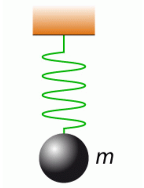
Mécanique du solide



CHAPITRE 5

Mécanique du solide



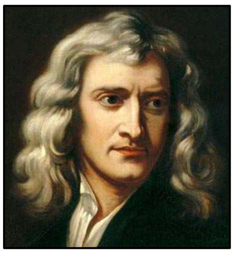


MECANIQUE DU SOLIDE

Mécanique classique – Introduction à la dynamique

1 – APPROCHE HISTORIQUE

Galilée
(1564 – 1642)



Isaac Newton
(1643 – 1727)

Au XVIIe siècle, **Galilée** énonce un principe simple : *Tour corps possède une certaine inertie qui l'oblige à conserver sa vitesse, à moins qu'une force extérieure l'oblige à arrêter ce mouvement.*

Moins d'un siècle après, Isaac **Newton** définit ce qu'est une masse, un poids et une force puis formule trois lois fondamentales :

1ère loi : *Dans un repère galiléen, tout objet en état de mouvement rectiligne uniforme et soumis à aucune force extérieure conserve son mouvement.*

⇨ Cette loi reprend et précise l'énoncé de Galilée ; elle traduit en fait le **P**rincipe **F**ondamental de la **S**tatique (**PFS**) qui est un cas particulier du PFD.

2ème loi : *Dans un repère galiléen, on a : Force = masse x accélération.*

⇨ Cette loi constitue le **P**rincipe **F**ondamental de la **D**ynamique (**PFD**).

3ème loi : *Tout corps soumis à une force exerce en retour une force de même intensité et de direction opposée.*

⇨ Cette loi constitue le **P**rincipe des **A**ctions **M**utuelles (voir **PAM**).

La mécanique classique, dite aussi « newtonienne » ou encore de « Galilée-Newton » ne s'applique que pour des systèmes matériels dont la vitesse est faible face à celle de la lumière ($v < 0{,}6 \cdot c$). Si tel n'est pas le cas, des effets relativistes sont à considérer et il faut changer de cadre théorique.

2 – DYNAMIQUE D'UN SYSTEME MATERIEL – EXPLICATION

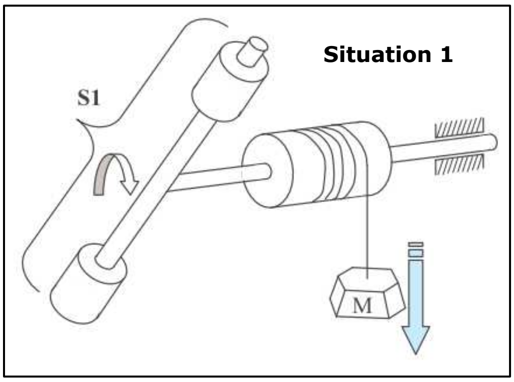
Une différence entre les deux situations proposées est la position des masselottes sur la tige.

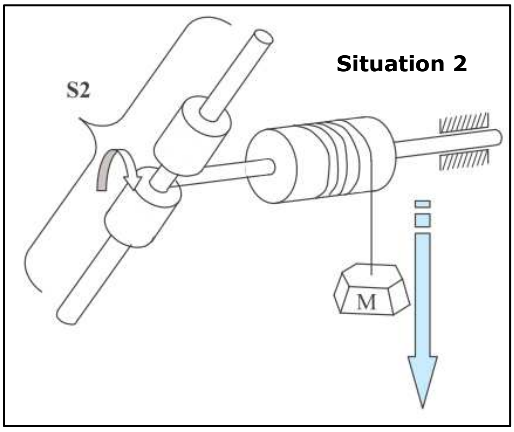
Constatation :

Les systèmes étant abandonnés à eux-mêmes, la masse de la situation 2 va descendre plus vite que celle de la situation 1 : la dynamique n'est pas la même (bien que régis par les même lois, celles de Newton).

La mise en relation de l'accélération prise par le système et les forces qu'il subit est assurée par les lois de Newton.

⇨ Il s'agit alors de mener une étude dynamique.

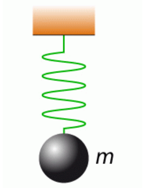




3 – DEFINITION

La dynamique est la partie de la mécanique qui étudie le mouvement d'un corps en fonction des forces auxquelles il est soumis.

Mener l'étude dynamique d'un système matériel consiste à lui appliquer le PFD pour trouver ses équations de mouvement (expressions donnant la position, la vitesse, et l'accélération en fonction du temps).



MECANIQUE DU SOLIDE

Isolement d'un système matériel
Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME)

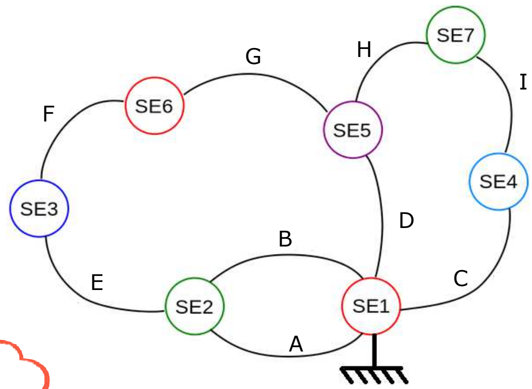
Chapitre 5
2

1 – PREAMBULE

*Certaines lois (principes, théorèmes, etc.) nécessitent de définir explicitement l'ensemble sur lequel elles seront appliquées. En mécanique, notamment pour les études de dynamique, statique et énergétique, la **définition claire et précise du système isolé** constitue la première étape.*

2 – ISOLEMENT D'UN SYSTEME MATERIEL

Soit un mécanisme représenté au travers de son graphe des liaisons. On a ici 7 classes d'équivalence (SE1 à SE7) et la classe SE1 est déclarée comme étant le bâti.
Les liaisons entre les classes, lorsqu'elles existent, sont matérialisées à l'aide d'un arc assorti d'une lettre qui précise le centre de la liaison.



→ Isoler un système matériel consiste à définir clairement la partie du tout sur laquelle on va travailler.

Exemples de systèmes isolés :
S = {SE2} | S = {SE2 + SE3} | S = {SE4} | S = {SE2 + SE3 + SE6 + SE5} | S = {SE5 + SE7} | etc…

Important : le bâti, ici {SE1}, étant lié à la terre, il ne s'isole **JAMAIS**.

3 – BILAN DES ACTIONS MECANIQUES EXTERIEURES (BAME)

Le système à étudier (isolé) étant clairement défini, il est maintenant possible de réaliser le **bilan des actions mécaniques qu'il subit** ; ces actions peuvent être de **contact** (dans les liaisons) ou à **distance** (poids, aimant).

Souvent, **le poids de certains ensembles est négligé** ; le cas échéant, on les ignore purement et simplement. Mais ceux devant être pris en compte doivent être considérés sous peine de mal traiter le problème. Ceci fait souvent l'objet d'une **hypothèse qui est donnée dans l'énoncé des problèmes** à traiter…

→ Faire le BAME consiste à dresser la liste des AME subits par le système isolé.

Selon la méthode de résolution mise en œuvre pour aborder le problème, le BAME est rédigé sous une forme ou une autre :

- Méthode de résolution graphique : on **dresse un tableau** (nom, point, direction, sens, intensité).

BAME				
Nom	Point	Direction	Sens	Intensité (N)
$\vec{A}$	A	Δ_A	↙	50
$\vec{B}$	B	?	?	?
$\vec{C}$	C	Δ_C	?	?

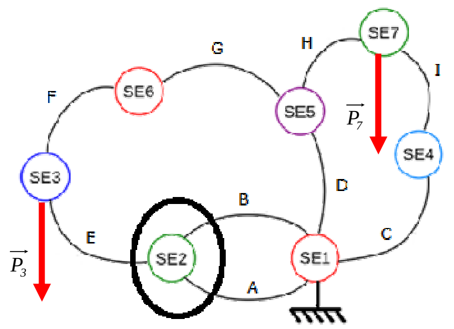
Exemple de BAME pour une étude de statique graphique

- Méthode de résolution analytique : on **écrit des vecteurs** (expression vectorielle).
- Méthode de résolution par les torseurs : on **écrit des torseurs**.

Exemples :

Dans les exemples qui suivent :

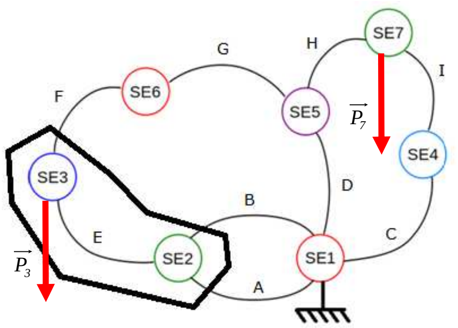
- On se limite à donner le nom des AME identifiées pour chaque système isolé.
- Le Bilan des Actions Mécaniques <u>Intérieures</u> (BAMI) est donné à titre d'exemple.
- Les poids $\overrightarrow{P_2}$ et $\overrightarrow{P_7}$ des ensembles {SE2} et {SE7} sont considérés.



Système isolé : {SE2}

BAME : $\overrightarrow{A_{1\to 2}}$ $\overrightarrow{B_{1\to 2}}$ $\overrightarrow{E_{3\to 2}}$

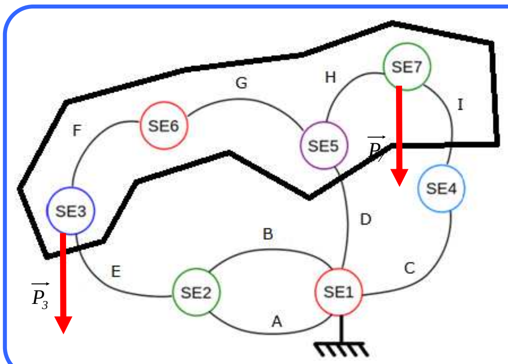
BAMI : -



Système isolé : {SE2 + SE3}

BAME : $\overrightarrow{A_{1\to 2}}$ $\overrightarrow{B_{1\to 2}}$ $\overrightarrow{F_{6\to 3}}$ $\overrightarrow{P_3}$

BAMI : $\overrightarrow{E_{2\to 3}}$ $\overrightarrow{E_{3\to 2}}$



Système isolé : {SE3 + SE5 + SE6 + SE7}

BAME : $\overrightarrow{E_{2\to 3}}$ $\overrightarrow{D_{1\to 5}}$ $\overrightarrow{I_{4\to 7}}$ $\overrightarrow{P_3}$ $\overrightarrow{P_7}$

BAMI : $\overrightarrow{F_{6\to 3}}$ $\overrightarrow{F_{3\to 6}}$ $\overrightarrow{G_{5\to 6}}$ $\overrightarrow{G_{6\to 5}}$ $\overrightarrow{H_{5\to 7}}$ $\overrightarrow{H_{7\to 5}}$

MECANIQUE DU SOLIDE

Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

1 – LIMITES D'ETUDE

Limite 1 : on se place dans la cadre de la mécanique classique, celle des systèmes matériels dont la vitesse est faible face à celle de la lumière ($v < 0{,}6 \cdot c$).

Limite 2 : On se place toujours dans un référentiel galiléen.

2 – EXPRESSION VECTORIELLE DU PFD

La dynamique d'un système matériel est régie par deux théorèmes qui traduisent la seconde loi de Newton.

Théorème de la résultante dynamique

$$\boxed{\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G(t)}}$$

avec

$\sum \overrightarrow{F_{ext}}$	Somme des forces extérieures appliquées au solide	(N)
m	Masse du solide (constante)	(kg)
$\overrightarrow{a_G(t)}$	Accélération (absolue) du centre de gravité du solide	$(m \cdot s^{-2})$

- Le terme $m \cdot \overrightarrow{a_G(t)}$ s'appelle la résultante dynamique : $\overrightarrow{R_D} = m \cdot \overrightarrow{a_G(t)}$
- Si l'accélération est nulle, alors on a $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ (théorème de la résultante du PFS qui est un cas particulier du PFD).

Théorème du moment dynamique

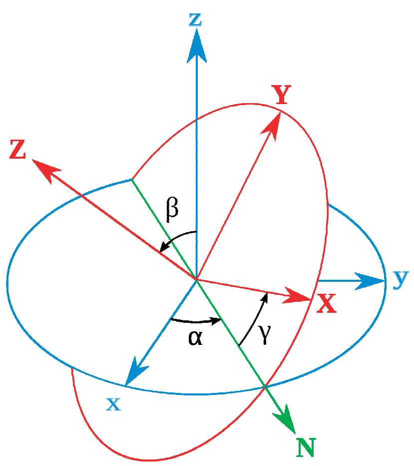
$$\boxed{\sum M_G\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = I_{G,Z} \cdot \alpha(t)}$$

avec

$\sum M_G\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$	Somme des moments en G des forces extérieures appliquées au solide	$(N \cdot m)$
$I_{G,Z}$	Moment d'inertie du solide sur l'axe $(G,\vec{z})$	$(kg \cdot m^2)$
$\alpha(t)$	Accélération angulaire sur l'axe $(G,\vec{z})$	$(rad \cdot s^{-2})$

- G est le centre de gravité du système étudié (on dit aussi centre d'inertie).
- Le terme $I_{G,Z} \cdot \alpha(t)$ s'appelle le moment dynamique : $M_D = I_{G,Z} \cdot \alpha(t)$
- Si l'accélération angulaire est nulle, alors on a $\sum M_G\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = 0$ (il s'agit du théorème du moment du PFS qui est un cas particulier du PFD).

L'accélération angulaire a été considérée sur l'axe $(G,\vec{z})$ uniquement. Or, un solide peut dans le cas général tourner autour des trois axes (angles α , β et γ sur la figure ci-contre).



Ce faisant, l'accélération angulaire d'un solide (1) par rapport à un solide (0) est un vecteur noté généralement $\overrightarrow{\alpha_{1/0}}$ avec : $\overrightarrow{\alpha_{1/0}} \begin{vmatrix} \alpha_{x1/0} \\ \alpha_{y1/0} \\ \alpha_{y1/0} \end{vmatrix}$

Les moments de force étant eux aussi vectoriels, le moment d'inertie est alors représenté par une *matrice* dite « d'inertie » ; elle est notée $\overline{\overline{I_G}}$:

$$\overline{\overline{I_G}} = \begin{vmatrix} I_{Gxx} & I_{Gxy} & I_{Gxz} \\ I_{Gyx} & I_{Gyy} & I_{Gyz} \\ I_{Gzx} & I_{Gxx} & I_{Gzz} \end{vmatrix}$$

La formulation générale du PFD en rotation est donc : $\sum \overrightarrow{M_G\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)} = \overline{\overline{I_G}} \cdot \overrightarrow{\alpha_{1/0}}$

Notons tout de suite que le bagage mathématique nécessaire pour traiter des problèmes de ce genre n'est pas celui du niveau de Première, ni d'ailleurs de Terminale. Aussi, pour les problèmes traités sur le papier, ***nous nous limiterons toujours au cas particulier d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.***

3 – EXPRESSION TORSORIELLE DU PFD

<u>Rappel</u> : *le torseur est une entité mathématique contenant deux vecteurs. Il va ainsi permettre de résumer en une seule expression les théorèmes de la résultante dynamique et du moment dynamique :*

$$\boxed{\sum \overbrace{\{T_{ext}\}}^{\text{torseur}} = \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\overrightarrow{R_D}}^{\text{vecteur}} \\ \underbrace{\overrightarrow{\delta_D}}_{\text{vecteur}} \end{matrix} \right\}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\overrightarrow{R_D} = m \cdot \overrightarrow{a_G(t)}}^{\text{vecteur}} \\ \underbrace{\overrightarrow{\delta_D} = \overline{\overline{I_G}} \cdot \overrightarrow{\alpha_{1/0}}}_{\text{vecteur}} \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\overrightarrow{R_D} = m \cdot \overrightarrow{a_G(t)}}^{\text{vecteur}} \\ \underbrace{\delta_D = I_{GZ} \cdot \alpha_{z1/0}}_{\text{scalaire}} \end{matrix} \right.$$

Outre l'aspect « écriture », <u>l'approche torsorielle est très puissante et adaptée pour résoudre les problèmes complexes</u> (tridimensionnels).

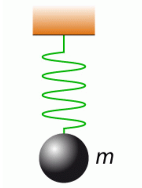
4 – METHODE PRATIQUE POUR RESOUDRE UN PROBLEME DE DYNAMIQUE

1) **Lire** le problème et bien identifier ce que l'on connaît et ce que l'on cherche (efforts, géométrie, …).
2) **Définir** clairement le système isolé (tout ou partie du système)
   - ☞ *on peut utiliser le graphe des liaisons qui aide à clarifier les choses.*
3) **Réaliser** le **B**ilan des **A**ctions **M**écaniques **E**xtérieures (BAME) subit par le système isolé
   - ☞ *sous forme algébrique, vectorielle ou torsorielle selon l'approche du problème.*
   - ☞ *Utiliser le Principe des Actions Mutuelles (PAM) si nécessaire (ce qui enlève des inconnues).*
4) **Appliquer** le PFD (qui donnera au mieux six équations algébriques).
5) **Résoudre** le système d'équations si possible.
6) **Renouveler** les étapes 2 à 6 si le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnues.

5 – CHOIX DE LA TECHNIQUE

Graphique ? Analytique ? Torseur ? Si elle n'est pas imposée, laquelle choisir ? Bien que par principe toutes les techniques fonctionnent pour tous les problèmes, l'une est souvent mieux adaptée qu'une autre ; tout dépend de la nature et de la **complexité du problème** à traiter :

Constructions graphiques	**Calculs analytiques**	**Calculs torsoriels**
- Problème de <u>statique</u> uniquement - Problème plan - Que des glisseurs	- Problème plan - Glisseurs parallèles	- Tout problème (2D, 3D) - Glisseurs, couples



MECANIQUE DU SOLIDE

Principe Fondamental de la Statique (PFS)

1 – PREAMBULE

La statique est une branche de la mécanique qui a pour objet **l'étude de l'équilibre des corps**. Il s'agit en fait du cas particulier de la dynamique du solide pour lequel **le système matériel étudié ne subit pas d'accélération** (ce qui n'implique pas nécessairement une vitesse nulle).

Il arrive parfois qu'un système subisse une accélération mais tellement faible que les effets d'inertie associés sont négligeables et donc négligés (on les considère comme nuls) ; on parle alors de système « quasi-statique ».

2 – LIMITES D'ETUDE

$\Rightarrow$ Celles énoncées pour le PFD.

3 – METHODE DE RESOLUTION D'UN PROBLEME DE STATIQUE

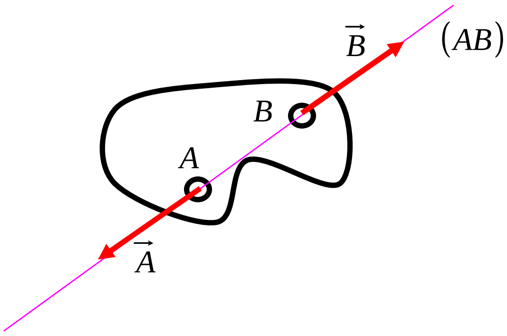
$\Rightarrow$ Celle énoncée pour le PFD.

4 – EXPRESSIONS DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (PFS)

Expression graphique pour un solide soumis à 2 forces

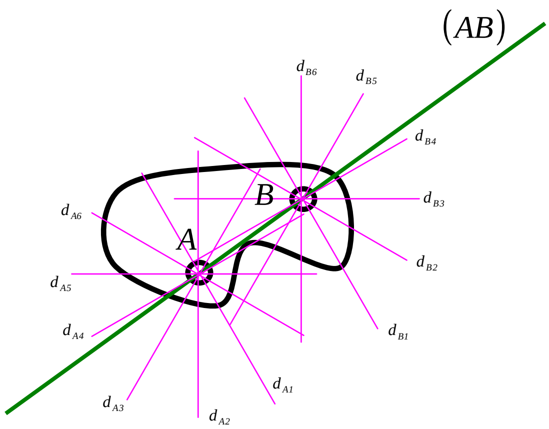
Un solide soumis à 2 forces est en équilibre si :

- $\Rightarrow$ **Les directions sont colinéaires (confondues),**
- $\Rightarrow$ **Les sens sont opposés,**
- $\Rightarrow$ **Les intensités sont égales.**



<u>Remarque</u> : *si, initialement, on ne connaît rien de ces deux forces, l'application du PFS donnera leur direction.*

BAME				
Nom	Point	Direction	Sens	Intensité
$\vec{A}$	A	?	?	?
$\vec{B}$	B	?	?	?



Explication :
La force en A est portée par une droite qui nécessairement passe par le point A ; mais il y a une infinité (ici d_{A1}, d_{A2}, d_{A3}, etc.).
Il en va de même pour la force en B (ici d_{B1}, d_{B2}, d_{B3}, etc.).

⇨ Au moment du BAME, **les directions sont indéterminées**.

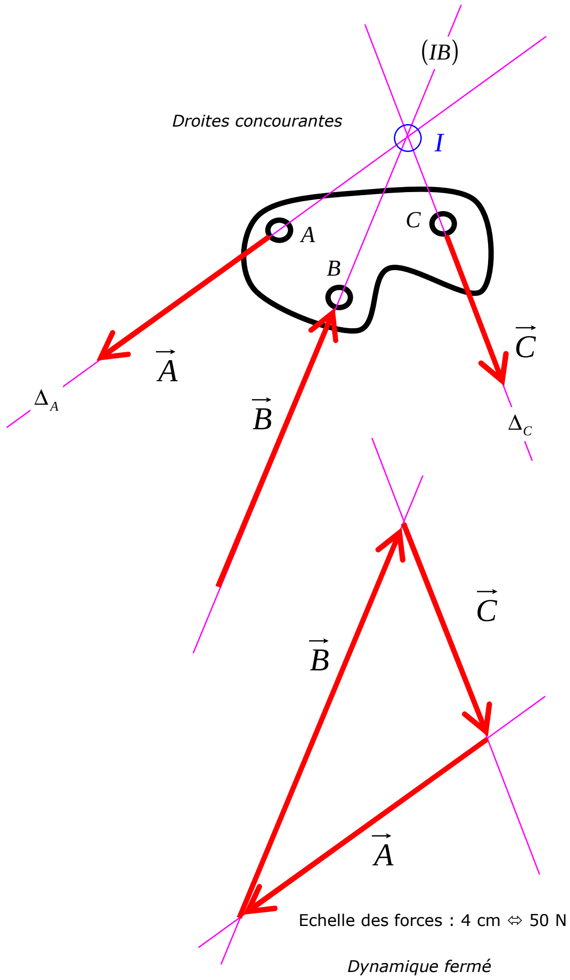
Mais le PFS (qui vient chronologiquement après le BAME) dit que les deux directions doivent être confondues. Il existe donc une droite passant par le point A qui doit être confondue avec une droite passant par le point B et ça ne peut être que la droite (AB).

⇨ **A l'issue de PFS, les directions sont connues.**

Expression graphique pour un solide soumis à 3 forces

Un solide soumis à 3 forces est en équilibre si :

$\Rightarrow$ Les directions sont concourantes,
$\Rightarrow$ Le dynamique est fermé.



<u>Remarque</u> : *dans le cas particulier où on connaît complètement une force* ***<u>et</u>*** *la direction d'une autre, alors l'application du PFS permet de* ***tout*** *trouver.*

BAME				
Nom	Point	Direction	Sens	Intensité (N)
$\vec{A}$	A	Δ_A	↙	50
$\vec{B}$	B	?	?	?
$\vec{C}$	C	Δ_C	?	?

Explication :
On utilise en premier la concourance des droites : Δ_A et Δ_C étant connues, elles sont sécantes en I.
Le PFS (qui vient chronologiquement après le BAME) dit que les directions doivent être concourantes. La direction de la troisième force ($\vec{B}$ ici) doit donc nécessairement passer par le point I.

⇨ La direction de la force $\vec{B}$ est maintenant connue : c'est la droite (BI).

On utilise ensuite la fermeture du dynamique (somme graphique de trois forces). Partant de celle qui est complètement connue (ici $\vec{A}$), on reporte à son extrémité et son origine les deux autres droites, ce qui donne un triangle (appelé « triangle des forces »). On trace sur les côtés du triangle les forces $\vec{B}$ et $\vec{C}$ en veillant à ce que les sens assurent bien la fermeture du dynamique.

⇨ Les sens des forces $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont maintenant connus.

La force connue $\vec{A}$ ayant été tracée à une échelle des forces donnée (et qui doit être indiquée près du dynamique), il suffit de mesurer les longueurs de forces $\vec{B}$ et $\vec{C}$ pour trouver leur intensité respective.

⇨ Les intensités des forces $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont maintenant connues.

Expression analytique

L'équilibre du solide se traduit par deux théorèmes :

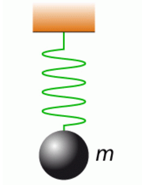
⇨ Théorème de la résultante : $\boxed{\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}}$ ⇨ Théorème du moment : $\boxed{\sum M_{/A}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = 0}$

<u>**Attention**</u> : *pour être sommés, les moments doivent tous être* ***exprimés au même point <u>et</u> dans le même repère****.*

Expression torsorielle

L'équilibre du solide se traduit par une relation qui « compile » les deux précédentes : $\boxed{\sum \{T_{ext}\} = \{0\}}$

<u>**Attention**</u> : *pour être sommés, les torseurs doivent tous être* ***exprimés au même point <u>et</u> dans le même repère****.*



MECANIQUE DU SOLIDE

Principe des Actions Mutuelles (PAM)

1 – PREAMBULE

Le *Principe des Actions Mutuelles* (PAM) est la troisième loi énoncée par Newton dans le cadre de la mécanique classique.

L'usage du PAM est indispensable *dans des études de dynamique (ou de statique) dès lors que le système matériel étudié se compose de sous-ensembles en liaisons et que l'on souhaite connaître les efforts dans les liaisons.*

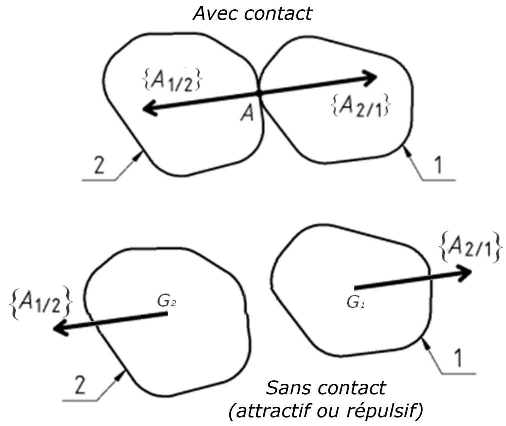
2 – ENONCE DU PAM

Soit (1) et (2) deux solides en interaction, qu'il y ait contact ou pas.

On identifie alors deux actions mécaniques distinctes :

$\Rightarrow$ $\{A_{1\to2}\}$, action du solide (1) sur le solide (2),

$\Rightarrow$ $\{A_{2\to1}\}$, action du solide (2) sur le solide (1).



A noter : *$\{A_{1\to2}\}$ et $\{A_{2\to1}\}$ peuvent être des forces pures ou des couples purs.*

Expression vectorielle : $\boxed{\overrightarrow{A_{1\to2}} = -\overrightarrow{A_{2\to1}}}$ **Expression torsorielle :** $\boxed{\{A_{1\to2}\} = -\{A_{2\to1}\}}$

Pour une **approche graphique** (avec des forces pures), on pourrait avoir ceci si tout est connu:

Nom	Point	Direction	Sens	Intensité (N)
$\overrightarrow{A_{1\to2}}$	A	/	↙	**150**
$\overrightarrow{A_{2\to1}}$	A	/	↗	**150**

Ou encore cela avec les sens et les intensités inconnus :

Nom	Point	Direction	Sens	Intensité (N)
$\overrightarrow{A_{1\to2}}$	A	/	?	?
$\overrightarrow{A_{2\to1}}$	A	/	?	?

3 – QUAND UTILISER LE PAM ?

La mise en œuvre du PAM est très souvent **indispensable** pour résoudre des problèmes de dynamique (ou de statique).
Si, dans un BAME, on a $\{A_{1\to2}\}$ et qu'on connait par ailleurs $\{A_{2\to1}\}$, même partiellement, alors il y a intérêt à mettre en œuvre le PAM pour récupérer des informations (la direction *et/ou* le sens *et/ou* l'intensité).

MECANIQUE DU SOLIDE

Problème plan

1 – PREAMBULE

Le traitement des problèmes de dynamique (ou de statique) peut parfois être simplifié en le ramenant dans un plan un système tridimensionnel. Cette simplification, si elle est possible, ne se fait pas au détriment de la qualité des résultats ; elle ne fait que faciliter le traitement du problème.

Par ailleurs, il arrive que certaines géométries présentent un degré d'hyperstatisme $h > 0$ impliquant de facto plus d'inconnues que d'équations. Si des considérations géométriques permettent raisonnablement d'annuler d'emblé certaines inconnues, alors il faut le faire ; ceci *peut* rendre le problème soluble.

2 – CONDITIONS POUR DECLARER UN PROBLEME PLAN

Un problème est dit « plan » si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

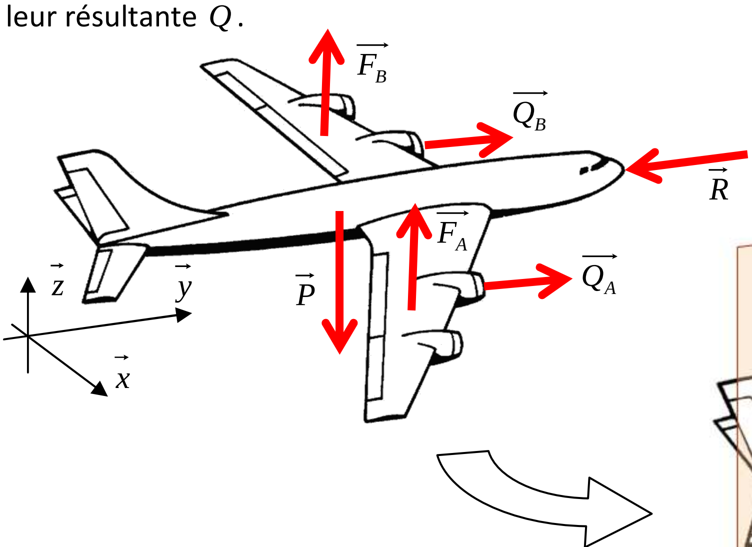
$\Rightarrow$ La géométrie des masses du mécanisme possède un plan de symétrie,

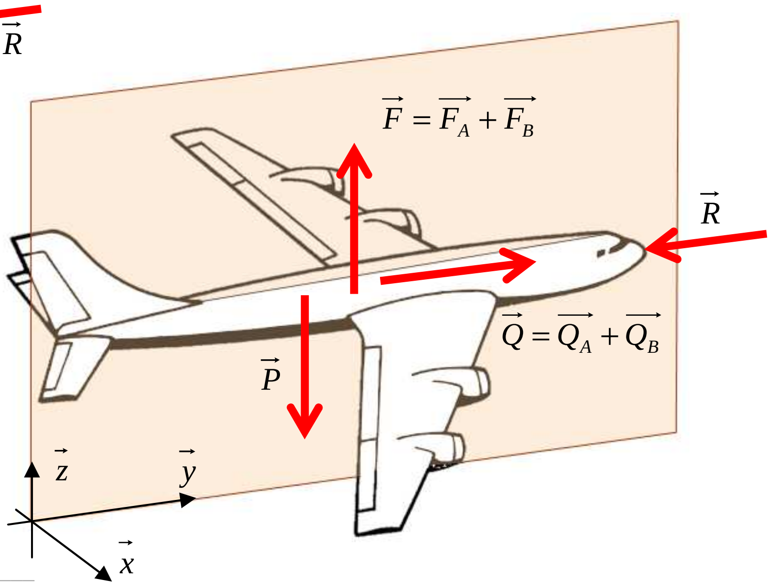
$\Rightarrow$ Les forces peuvent toutes être ramenées dans le plan de symétrie,

$\Rightarrow$ Les couples sont tous perpendiculaires au plan de symétrie.

3 – UTILITE POUR SIMPLIFIER LE TRAITEMENT D'UN PROBLEME

Le plan $(\vec{y};\vec{z})$ est un plan de symétrie géométrique de l'avion. $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont dans ce plan ; $\overrightarrow{F_B}$ étant symétrique à $\overrightarrow{F_A}$, on considère la résultante $\vec{F}$ ramenée dans le plan de symétrie, idem pour $\overrightarrow{Q_B}$ et $\overrightarrow{Q_A}$ avec leur résultante $\vec{Q}$.



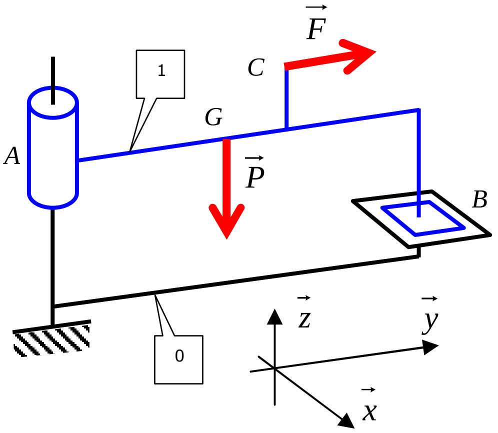


<u>Conséquence</u> :

Le problème étant reconnu « plan », son traitement sera plus aisé d'un point de vue calculatoire.

4 – UTILITE POUR RENDRE SOLUBLE UN PROBLEME HYPERSTATIQUE

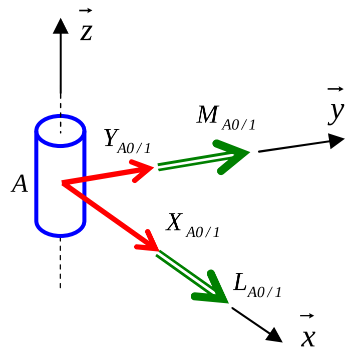
Considérons par exemple le système suivant composé de deux solides (0) et (1) en contact en A et en B :



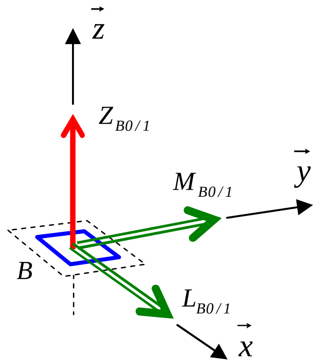
Ces contacts impliquent des liaisons mécaniques qui ici ont été modélisées par :

En A : liaison pivot glissant d'axe $(A;\vec{z})$ ⇨ 4 inconnues

En B : liaison appui plan de normale $(B;\vec{z})$ ⇨ 3 inconnues



Efforts transmissibles dans la pivot glissant (4 inconnues)



Efforts transmissibles dans l'appui plan (3 inconnues)

$\vec{P}$ et $\vec{F}$ représente un chargement supposé connu.

Le problème possède donc 7 inconnues algébriques et on montre que l'application du PFD (ou du PFS) sur l'ensemble (1) ne donnerait que 5 équations utiles.

⇨ Le système est donc hyperstatique d'ordre 2 ($h=2$) et ne peut pas *a priori* être résolu.

Observons maintenant ce qui suit :

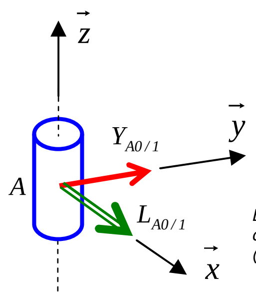
⇒ Les points A, B, G et C qui définissent la géométrie du système sont tous contenus dans un même plan ; ce dernier est donc plan de symétrie géométrique.

⇒ Les efforts extérieurs $\vec{P}$ et $\vec{F}$ sont dans ce plan.

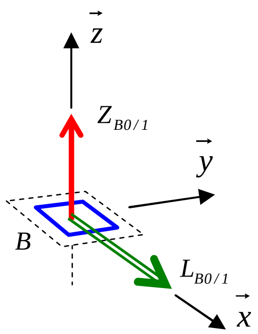
Ce faisant, on montre que :

⇒ <u>Toutes</u> les forces sont dans ce plan ⇨ $X_{A0/1}=0$

⇒ <u>Tous</u> les couples (ou moments) sont perpendiculaires à ce plan ⇨ $M_{A0/1}=M_{B0/1}=0$



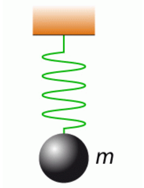
Efforts transmissibles dans la pivot glissant (2 inconnues)



Efforts transmissibles dans l'appui plan (2 inconnues)

3 inconnues algébriques ont été supprimées. Le problème ne possède donc plus que 5 inconnues algébriques et l'application du PFD (ou du PFS) sur l'ensemble (1) donne toujours 5 équations utiles.

⇨ Le système est donc isostatique ($h=0$) et peut être résolu.



MECANIQUE DU SOLIDE

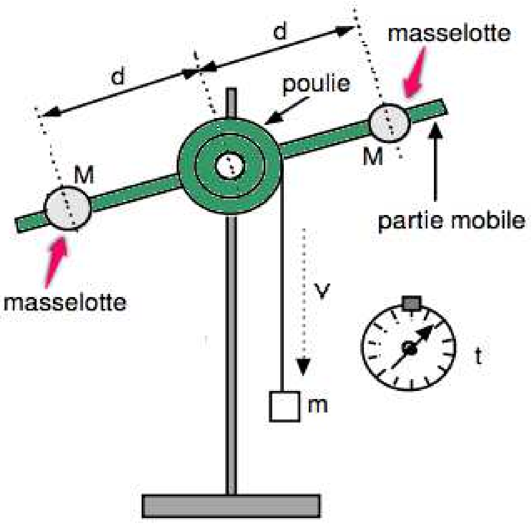
Moment d'inertie

1 – PREAMBULE

Le théorème du moment dynamique du PFD ou encore l'énergie cinétique d'un solide en rotation font intervenir une grandeur mécanique particulière appelée « **moment d'inertie** ».

Le moment d'inertie caractérise la distribution de la matière du solide étudié par rapport à un axe de rotation. Il joue en quelque sorte le même rôle que la masse pour un mouvement de translation.

2 – MISE EN EVIDENCE DE L'EFFET DU MOMENT D'INERTIE

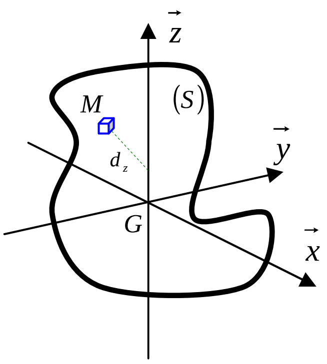


Deux masselottes de masse M sont disposées de part et d'autre de la partie mobile à la distance d de l'axe de rotation (centre de la poulie).
Le dispositif étant abandonné à lui-même, on constate que la masse suspendue m tombe, entrainant ainsi en rotation la partie mobile.

On constate enfin qu'en changeant la distance d et/ou les masses M, la mise en mouvement est plus ou moins rapide : plus d et/ou M sont grands, plus la mise en mouvement est lente.

⇨ **Les masses m et leur position d ont donc une influence sur la dynamique du système…**

3 – DEFINITION



On considère ici un solide (S) de centre d'inertie G et de masse m.
Soit dm une masse élémentaire (infinitésimale) placée au point courant M et située à la distance d de l'axe $(G,\vec{z})$.

Par définition, le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(G,\vec{z})$ est donné par la relation :

$$I_{GZ} = \int_V d_z^2 \cdot dm \qquad \text{avec} \qquad d_z^2 = x_M^2 + y_M^2$$

Par analogie, on a aussi les moments d'inertie sur les axes $(G,\vec{x})$ et $(G,\vec{y})$:

$$I_{GX} = \int_V d^2 \cdot dm \qquad \text{avec} \qquad d^2 = y_M^2 + z_M^2$$

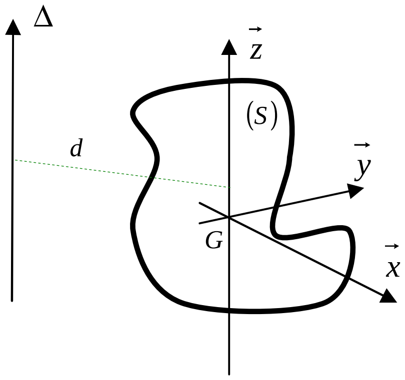
$$I_{GY} = \int_V d^2 \cdot dm \qquad \text{avec} \qquad d^2 = x_M^2 + z_M^2$$

D'un point de vue plus général, le moment d'inertie s'exprime avec une matrice d'inertie.

4 – DIMENSION ET UNITE

Le moment d'inertie est égal au produit du carré d'une distance par une masse. Sa dimension est donc $[I] = M \cdot L^2$ et, dans le système international d'unités, il s'exprime en $kg \cdot m^2$.

5 – THEOREME DE HUYGENS

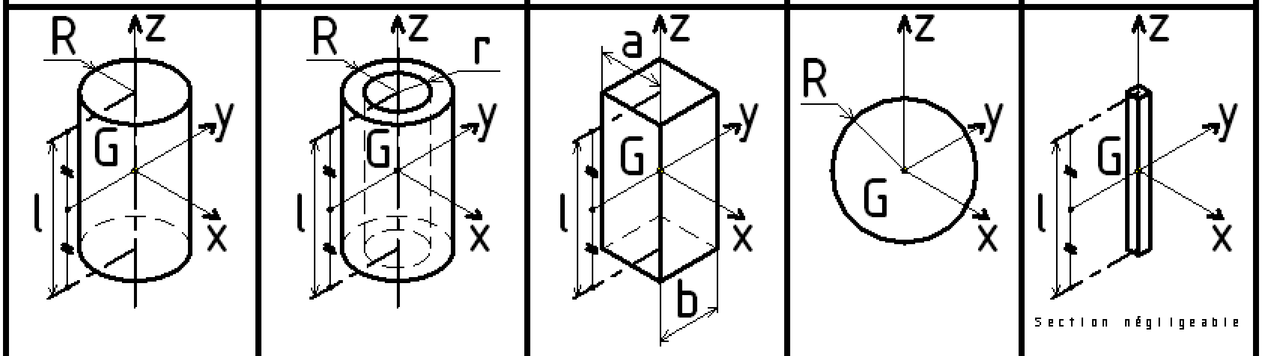


Soit I_{GZ} le moment d'inertie du solide (S) de centre d'inertie G et de masse m par rapport à l'axe $(G,\vec{z})$ et I_Δ son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ ($\Delta // \vec{z}$). On a :

$$\boxed{I_\Delta = I_{GZ} + m \cdot d^2}$$

Christian Huygens
(1629 – 1695)

6 – MOMENT D'INERTIE DE QUELQUES SOLIDES USUELS

	CYLINDRE	TUBE	PARALLELEPIPEDE RECTANGLE	SPHERE	TIGE
SOLIDES					Section négligeable
INERTIE	$Igx = \frac{m.R^2}{4} + \frac{m.l^2}{12}$ $Igy = \frac{m.R^2}{4} + \frac{m.l^2}{12}$ $Igz = \frac{m.R^2}{2}$	$Igx = \frac{m.(R^2+r^2)}{4} + \frac{m.l^2}{12}$ $Igy = \frac{m.(R^2+r^2)}{4} + \frac{m.l^2}{12}$ $Igz = \frac{m.(R^2+r^2)}{2}$	$Igx = \frac{m.(b^2+l^2)}{12}$ $Igy = \frac{m.(a^2+l^2)}{12}$ $Igz = \frac{m.(a^2+b^2)}{12}$	$Igx = \frac{2}{5}.m.R^2$ $Igy = \frac{2}{5}.m.R^2$ $Igz = \frac{2}{5}.m.R^2$	$Igx = \frac{m.l^2}{12}$ $Igy = \frac{m.l^2}{12}$ $Igz \approx 0$
Unités	I=Inertie (en kg.m²) ‖ m=masse(en kg) ‖ Dimensions (en m)				

Si le solide étudié possède une géométrie complexe, on peut avoir recourt à l'informatique. Les modeleurs volumiques sont capables de donner toutes les propriétés cinétiques d'un corps volumique (masse, coordonnées du centre d'inertie, moments d'inertie sous forme matricielle).

MECANIQUE DU SOLIDE

Frottement de glissement : modèle de Coulomb

1 – PREAMBULE

Le frottement est constaté dans deux principaux cas :

- ⇒ Frottement solide : *lorsque deux solides en contact ont un mouvement relatif.*
- ⇒ Frottement fluide : *lorsqu'un corps solide est dans un milieu fluide (liquide ou gazeux).*

Seul le premier cas est traité ici. Le frottement, toujours dissipatif d'un point de vue énergétique, trouve son siège dans la **rugosité des surfaces** en contact et dans leur **rapport physico-chimiques**.

2 – MISE EN EVIDENCE DU PHENOMENE DE FROTTEMENT

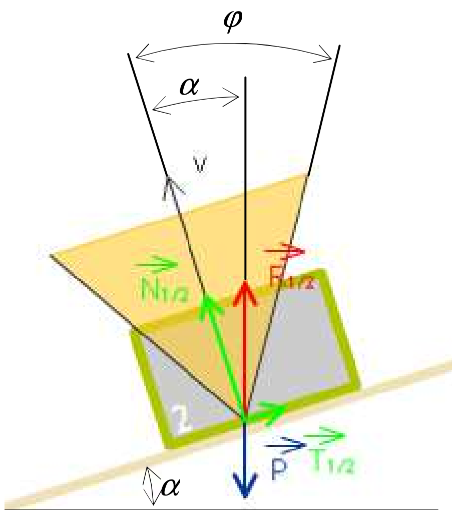
L'action du plan (1) sur la boite (2) est notée $\overrightarrow{R_{1/2}}$. Elle se décompose en deux composantes :

- ⇒ $\overrightarrow{T_{1/2}}$, **composante tangentielle** (dans le plan de contact)
- ⇒ $\overrightarrow{N_{1/2}}$, **composante normale** (perpendiculaire au plan de contact)

On a donc : $\overrightarrow{R_{1/2}} = \overrightarrow{N_{1/2}} + \overrightarrow{T_{1/2}}$.

La boite étant soumise à deux forces, $\vec{P}$ et $\overrightarrow{R_{1/2}}$, son équilibre implique qu'elles soient directement opposées (voir PFS 2 forces) ; ainsi, plus l'angle d'inclinaison α augmente, plus la réaction $\overrightarrow{R_{1/2}}$ s'incline / au plan. Il apparaît alors une valeur limite de α ; soit φ cette limite.

- ⇒ Tant que $\alpha \le \varphi$, la boite (2) ne glisse pas : il y a **équilibre**.
- ⇒ Si $\alpha > \varphi$, la boite (2) glisse : il n'y a **plus équilibre**.



On constate expérimentalement que la limite φ ne dépend pas du poids $\vec{P}$ de la boite mais uniquement de la nature des matériaux qui participent au contact de (1) et (2).

3 – COEFFICIENT DE FROTTEMENT – LOI DE COULOMB

L'angle limite φ correspond sur la figure au demi-angle du cône (le cône de frottement).

La géométrie de la situation donne $\tan\varphi = \dfrac{T_{1/2}}{N_{1/2}}$; en posant $f = \tan\varphi$, on la **loi de Coulomb** : $\boxed{T = N \cdot f}$

f s'appelle le coefficient de frottement, sans unité. Plus il est grand, plus il y a de frottement.

Couples de matériaux	**Conditions :** *Lubrification – température - pression*	f
Acier / Fonte Acier / Bronze	Surfaces sèches Surfaces grasses / Surfaces graissées	0,19 0,16 / 0,10
Fonte / Bronze Fonte / Fonte	Surfaces sèches Surfaces grasses / Surfaces graissées	0,21 0,15 / 0,05 – 0,10
Acier trempé / Bronze	Graissage moyen / Graissage sous pression	0,10 / 0,05
Acier trempé / Acier trempé	Graissage moyen / abondant / sous pression	0,10 / 0,07 / 0,05
Garniture amiantée pour freins d'automobile / Fonte Garniture métallique frittée / Acier	Sèches – Tmax. 140° C - Pression de contact 0,2 à 0,6 MPa Sèches – Tmax. 300° C - Pression de contact 0,2 à 1 MPa	0,35 – 0,40 0,10 – 0,20
Coussinet fritté (bronze + acier) / Acier	Lubrifiées à l'huile / à la graisse	0,01 / 0,05
Matières plastiques (toutes natures)	Surfaces lubrifiées	0,02 – 0,08
Polyamide 6 ; 6-6 ; 6-10 / Acier	Surfaces sèches	0,38 – 0,42
Pneus / Route goudronnée	Route sèche / mouillée / verglacée	0,60 – 0,70 / 0,35 – 0.60 / 0,10